

II. ROVNICE A NEROVNICE

(A) LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE

1. Základní pojmy, úpravy rovnic

ROVNICE (NEROVNICE) - výpis rovnosti (nerovnosti) 2 výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno označující NEZNÁMOU

pr. $3x + 6 = 2x - 5$ $3x \leq 2$ $3x + y = 4$ (2. rovnice)

- ANULOVANÝ TVAR: jedna strana rov. rovná nule

pr. $x^2 - 4 = 0$

KOŘEN ROVNICE (NEROVNICE) - číslo, po jehož dosazení na rovnici dostaneme platnou rovnici (nerovnost) - PRAVDIVÝ VÝROK

pr. číslo, kde -3 je kořenem rovnice $3x - 6 = 2x - 9$

(1. zp.) Mačí dosadit
 $3 \cdot (-3) - 6 = 2 \cdot (-3) - 9$
 $-15 = -15$ PLATÍ
 $(0 = 0)$

$\Rightarrow -3$ je kořenem

(2. zp.) $L(-3) = 3 \cdot (-3) - 6 = -15$ } $L(-3) = P(-3)$
 $P(-3) = 2 \cdot (-3) - 9 = -15$ } $\Rightarrow -3$ je kořenem

(3. zp.) vyřešit (ekvivalenční úpravami)
 a potom $3x - 6 = 2x - 9$
 $x = -3$ je kořenem

pr. uveď, kde -1, 4, 5 jsou kořeny nerovnice $2x - 5 \leq \frac{x+2}{2}$

-1: $2 \cdot (-1) - 5 \leq \frac{-1+2}{2}$ 4: $2 \cdot 4 - 5 \leq \frac{4+2}{2}$ 5: $2 \cdot 5 - 5 \leq \frac{5+2}{2}$
 $-7 \leq \frac{1}{2}$ $3 \leq 3$ $5 \leq \frac{7}{2}$
 platí $\Rightarrow -1$ kořenem platí $\Rightarrow 4$ je kořenem neplatí $\Rightarrow 5$ není kořenem

ROVNICÍM (NEROVNICÍM) PŘÍŘAZUJEME

σ ... OBOR ŘEŠENÍ (proměnné) rovnice (nerovnice) - množina, mezi jejímiž prvky máme hledat kořeny rov. (nerov.), bývá předem dána (např. číslo $\in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$); může-li dána, bývá $\sigma = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}$... DEFINIČNÍ OBOR rovnice (nerovnice) - množina všech prvků z oboru proměnné σ , pro něž jsou výrazy v rovnici (nerov.) definovány, tj. pro které má rov. (nerov.) smysl
 - průnik definičních oborů obou výrazů

pr. $\frac{x-2}{x-3} = 1$ $\sigma = \mathbb{R}$ $\sqrt{x+7} \geq 2$ $\sigma = \mathbb{R}$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{3\}$ $\mathcal{D} = \langle -7, +\infty \rangle$

$\left[\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right]$
 -1

$\mathcal{K}$... MNOŽINA VŠECH KOŘENŮ RCE (NERCE) - množina všech prvků z def. oboru $\mathcal{D}$, které vyhovují (splňují) rov. (nerov.)
 $\mathcal{K} \subset \mathcal{D} \subset \sigma$

ŘEŠENÍ ROVNICE (NERCE) - máme postup, kterým hledáme kořeny
 - vyhledáváme tzv. důsledkových (implikačních úprav)

② PŘEHLED EKVIVALENTNÍCH ÚPRAV NEROVNIC

UN1 výměna stran nerovnice a současně obrátit znak nerovnosti

$$2 > 3x \\ 3x < 2$$

UN2 násobení libovolné strany nerovnice kladným, který se ji rovná v celém $\mathbb{D}$ nebo

$$3(x+4) > 12 \\ 3x+12 > 12$$

UN3 přičtení (odčtení) libovolného čísla nebo výrazu s num. dom. který je definován v celém $\mathbb{D}$ nebo k oběma stranám rovnice, znak nerovnosti se nemění

$$3x+12 > 2 \quad | -12 \\ 3x > -10$$

UN4 vyčlenění (vydělění) obou stran m. v. c.

- Kladným číslem nebo výrazem, který je definován v $\mathbb{D}$, přitom znak nerovnosti se nemění

$$\frac{x}{2} \leq 3 \quad | \cdot 2_0 \quad 4x > 2 \quad | : 2_0 \\ x \leq 6 \quad x > 1$$

- Záporným číslem nebo záporným výrazem, který je defin. v $\mathbb{D}$, přitom ZNAK NEROVNOSTI SE KMITNĚ V OBRÁCENÍ

$$-x \leq 3 \quad | \cdot (-1) \quad -4x > 2 \quad | : (-4) \\ x \geq -3 \quad x < -\frac{1}{2}$$

UN5 umocnění obou stran m. v. c. příslušným mocnidl. c., pokud obě strany m. v. c. kladné v celém $\mathbb{D}$, znak nerovnosti se nemění [VIZ RACION. NERCE]

UN6 odmocnění obou stran m. v. c. příslušným odmocnidl. c., pokud obě strany m. v. c. nezáporné (≥ 0) v celém $\mathbb{D}$, znak nerovnosti se nemění

UN7 klogaritmování obou stran nerovnice při limě základu větší než 1, pokud obě strany m. v. c. kladné v celém $\mathbb{D}$, znak nerovnosti se nemění

Příklady (ukázky)

① Řeš v $\mathbb{R}$: $x^{\frac{1}{2}} - x = 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

Ř: CHYBNĚ! $x^{\frac{1}{2}} - x = 0$

$$x_1 \quad x^{\frac{1}{2}} = x \quad | \cdot \frac{1}{x} \quad (: x) !$$

$x_2 \quad x = 1$ **NEZDE** $\rightarrow$ NENÍ DŮSLEDKOVÁ ÚPRAVA!
položí $\frac{1}{x}$ není defin. v celém $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
[$\frac{1}{x}$ je defin. v $\mathbb{R} - \{0\}$]

- správně řešení jsou 1 a 0 ("ztratili" jsme kořen 0) $x_2 \neq x$

SPRÁVNĚ! $x^{\frac{1}{2}} - x = 0$ přirodum.
 $x(x-1) = 0$ má součinový
tvar a m. v. c.
 $x_1 = 0 \quad x-1=0 \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow$
 $x_2 = 1 \quad (a=0 \vee b=0)$

$$x_2 = \{0, 1\}$$

② Řeš v $\mathbb{R}$

$$x \quad \sqrt{x} = -x \quad |^2 \text{ UR 5a) NEKIV.} \Rightarrow \text{zkouška nulová}$$

$$x_1 \quad x = x^2 \\ 0 = x^2 - x$$

$$x_2 \quad x^2 - x = 0$$

$$x_3 \quad x(x-1) = 0$$

$$x_1 \quad x=0 \quad x-1=0 \\ x_2 \quad x=1$$

$$x_3 = \{0, 1\} \quad x < x_3$$

x_4 (SOUČÁST ŘEŠENÍ)

$$L(0) = \sqrt{0} = 0 \quad P(0) = -0 = 0 \quad L(0) = P(0)$$

$$L(1) = \sqrt{1} = 1 \quad P(1) = -1 \quad L(1) \neq P(1)$$

$$x_4 = \{0\} \quad (1 \text{ není kořen p. v. c.})$$

③ Řeš v $\mathbb{R}$

$$\frac{3}{x-1} < 1 \quad | \cdot (x-1)$$

$$[3 < x-1] \quad \text{CHYBNĚ}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$$

NEZDE (nemáme, kolik $x-1 > 0$ nebo $x-1 < 0$, abychom obrátili či neobrátili znaménko nerovnosti)

SPRÁVNĚ

1. k. v. smutná a přímá má podílony

2. k. v. rozdíl má 2 části
1. $x-1 > 0$ 2. $x-1 < 0$
[VICE VIZ NERCE V PODLOŽKOVÉM TVARU]